
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

А.А. Таранцев, доктор технических наук;

П.А. Манин;

О.В. Щербаков, доктор технических наук, профессор.

Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России

Рассмотрена возможность нахождения числа каналов обслуживания и их производительности для замкнутой стандартной многоканальной системы массового обслуживания по требованиям к её характеристикам. Приведён способ уточнения параметров системы при ограниченной готовности каналов обслуживания.

Ключевые слова: система массового обслуживания, источник заявок, канал обслуживания

ABOUT THE PROBLEM OF SYNTHESIS OF THE CLOSED SERVICE SYSTEM TAKING INTO ACCOUNT READINESS OF CHANNELS

A.A. Tarantsev; P.A. Manin; O.V. Sherbakov.

Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia

The possibility of location of number of service channels and their productivity for the closed standard multichannel service system under requirements to its characteristics is considered. The method of specification parameters of system is resulted at the limited readiness of service channels.

Key words: service system, source of orders, service channel

На практике широкое распространение получили замкнутые системы массового обслуживания (СМО), используемые, например, для моделирования процессов поддержания в готовности нескольких объектов – станков, автомобилей, серверов и т.п. [1, 2]. Такие объекты являются источниками заявок – сигналов, вызовов, сообщений и др., которые обслуживаются операторами, ремонтниками, аварийно-наладочными бригадами, именуемыми каналами обслуживания.

Применительно к СМО решаются следующие задачи:

- анализ (по параметрам СМО определение её характеристик);
- синтез (по заданным характеристикам СМО и некоторым параметрам определяются остальные параметры СМО);
- идентификация (по результатам наблюдения за входным и выходным потоками заявок определение некоторых параметров и характеристик СМО) [3].

Первая задача (анализ) не представляет особой трудности, третья (идентификация) встречается довольно редко, а второй задаче (синтезу) следует уделить особое внимание применительно к замкнутой СМО. Тем более, что для незамкнутой СМО такая задача в графическом виде была решена в работе [4].

Математическое описание замкнутой стандартной СМО

Под стандартной замкнутой СМО будем понимать систему, содержащую N источников одинаковых простейших потоков заявок, обслуживаемых n каналами обслуживания. Причём $N \geq n$, очередь заявок организована по принципу «раньше пришёл, раньше обслужился», время обслуживания случайное и подчинено экспоненциальному закону с параметром (скоростью) $\mu = t_{об}^{-1}$, взаимопомощь между каналами обслуживания отсутствует, заявки от каждого источника поступают с частотой $\nu = t_n^{-1}$, а отношение среднего времени обслуживания заявок к среднему времени поступления $\beta = t_{об}/t_n$ является приведённой нагрузкой.

Особый интерес представляет именно стандартная СМО, поскольку при тех же параметрах N , n и β её основные характеристики (вероятности незанятости каналов обслуживания p_0 и полного останова p_n) не отличаются от характеристик замкнутой СМО с другими законами поступления-обслуживания (эрланговскими потоками заявок и времени обслуживания, подчинённому распределению Стьюдента [5]), а математическое описание значительно проще.

Стандартная замкнутая СМО с N источниками и n каналами обслуживания может пребывать в $N+1$ состояниях, вероятности которых для установившегося случая имеют вид [1]:

$$p_i = \begin{cases} C_N^i \beta^i p_0, i \in [1, n] \\ N! n^n [n!(N-i)!]^{-1} (\beta/n)^i p_0, i \in [n+1, N] \end{cases}, \quad (1)$$

$$p_0^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^n \beta^i C_N^i + \sum_{i=n+1}^N \beta^i C_N^i i!(n^{i-n} n!)^{-1}, \quad (2)$$

где $C_N^i = N! [i!(N-i)!]^{-1}$ – число сочетаний из N по i .

Принято различать следующие основные характеристики замкнутой СМО:

– вероятность незанятости всех каналов (ни один источник не подал заявок, полная готовность СМО) – p_0 ;

– вероятность полного останова СМО (все источники подали заявки, n обслуживается, $N-n$ – ожидают):

$$p_n = p_N; \quad (3)$$

– вероятность немедленного принятия заявки к обслуживанию (свободен хотя бы один канал обслуживания):

$$p_n = p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1}; \quad (4)$$

– средняя величина очереди:

$$m_{оч} = \prod_{i=n+1}^N (i-n) p_i; \quad (5)$$

– нагрузка на канал:

$$\rho = N\beta/n. \quad (6)$$

Задача анализа ставится и решается следующим образом: по заданным параметрам СМО – N , n и β требуется оценить характеристики СМО. Для этого сначала с использованием выражений (1) и (2) определяются вероятности состояний СМО, а затем по выражениям (3)–(6) – её характеристики.

Задача синтеза замкнутой стандартной СМО

Задача синтеза замкнутой СМО может иметь следующую постановку: известны число источников заявок N и частота ν и заданы требования к характеристикам СМО:

$$p_0 \geq p_0^d, \quad (7)$$

$$p_n \leq p_n^d, \quad (8)$$

$$p_n \geq p_n^d, \quad (9)$$

$$m_{оч} \leq m_{оч}^d, \quad (10)$$

$$\rho \leq \rho^d, \quad (11)$$

где $p_0^d, p_n^d, p_n^d, m_{оч}^d, \rho^d$ – допустимые значения соответствующих характеристик.

Требуется подобрать такие значения параметров n и μ , чтобы выполнялись условия (7)–(11).

Задачу синтеза СМО, в отличие от задачи анализа, можно решать только численными методами, что не всегда удобно с точки зрения практики. Для преодоления этой трудности, как и в работе [4], целесообразно использовать номограммы.

Такая номограмма для нормативного значения $p_n=0,001$ [6] приведена на рис. 1 (подобные номограммы могут быть построены и для других значений p_n). На ней в координатах характеристик «вероятность незанятости каналов p_0 – вероятность немедленного принятия заявки p_n » нанесены линии равных значений параметров N и n , а также характеристик $m_{оч}$ и ρ . В табл. даны значения, приведённой нагрузки β для той же вероятности $p_n=0,001$.

Пользоваться номограммой для синтеза замкнутой стандартной СМО можно следующим образом:

- по заданным ограничениям на характеристики $p_0^d, p_n^d, m_{оч}^d$ и ρ^d (рис. 1) выделяется рабочая область, в пределах которой на пересечении линий N и n определяется рабочая точка А – соответствующее ей число каналов обслуживания n и является требуемым (синтезированным) параметром СМО;

- по величинам N и n по табл. определяется величина приведённой нагрузки β ;

- по величинам параметров β и ν находится другой параметр – требуемая величина скорости обслуживания:

$$\mu = \nu/\beta; \quad (12)$$

- по величинам параметров β, N и n с использованием выражений (1)–(6) находятся величины характеристик СМО и производится проверка выполнения условий (7)–(11).

Это целесообразно пояснить на примере. Пусть некоторая техническая система содержит четыре агрегата ($N=4$), которые выходят из строя в среднем один раз в сутки ($\nu=1 \text{ сут}^{-1} \approx 0,0417 \text{ час}^{-1}$), причём поток отказов простейший. К характеристикам этой системы предъявляются следующие требования:

- вероятность того, что откажут все агрегаты (то есть полный выход из строя технической системы в целом), не должна превышать 0,1 % ($p_n^A=0,001$);
- вероятность полной готовности всех агрегатов должна быть не менее 50 % ($p_0^A=0,5$);
- вероятность того, что при отказе агрегата к нему немедленно прибудет наладчик для проведения ремонта, должна быть не менее 90 % ($p_{нд}=0,9$);
- в очереди на проведение ремонта должно быть не более одного агрегата ($m_{оч}^A=1$);
- наладчики, исходя из эргономических соображений [7], должны заниматься ремонтными работами не более 40 % продолжительности смены ($p_d=0,4$).

Требуется определить минимальное число наладчиков в смене n и среднюю скорость проведения ремонта μ , если время, затрачиваемое на ремонт, имеет случайный характер и подчинено экспоненциальному закону.

Для решения такой задачи синтеза технической системы, являющейся замкнутой 4-канальной СМО, сначала используем номограмму (рис. 1). На ней выделим рабочую область, исходя из требований к характеристикам, и найдём рабочую точку А на пересечении линий $N=4$ и $n=2$ (рис. 2). Таким образом, для обслуживания агрегатов технической системы необходимо не менее двух наладчиков. Затем по табл. для $N=4$ и $n=2$ находим $\beta=0,1565$, а из (12) – $\mu=0,0417/0,1565 \approx 0,2662$ час⁻¹. Другими словами, каждый наладчик должен суметь отремонтировать агрегат в среднем не менее, чем за $t_{об}=3,75$ часа.

Проверка, проведённая по выражениям (1)–(6) для параметров $N=4$, $n=2$ и $\beta=0,1565$ (она же – задача анализа), позволила получить следующие значения характеристик СМО: $p_0=0,5563$; $p_n=0,001$; $p_n=0,9045$; $m_{оч}=0,0148$; $\rho=0,3130$, находящиеся в пределах допусков, что подтверждает правильность решения задачи синтеза.

Следует отметить, что, во-первых, иногда требования к характеристикам СМО могут быть заданы так, что решение задачи синтеза становится невозможным (например, для рассмотренного случая, если бы $p_0^A=0,6$). Тогда необходимо проводить корректировку требований к характеристикам СМО.

Во-вторых, надёжность каналов в плане их готовности к обслуживанию заявок может быть не 100-процентной, например, поскольку наладчик может отлучаться с рабочего места. Это количественно может быть учтено через коэффициент готовности:

$$k_r = 1 - t_{от} t_c^{-1}, \quad (13)$$

где t_c , $t_{от}$ – продолжительность смены и общее время отсутствия наладчика.

Таблица. Значения приведённой нагрузки β для вероятности $p_n=0,001$

N	n	β	N	n	β	N	n	β	N	n	β
2	1	0,0229	6	1	0,1233	8	1	0,1375	9	7	0,8012
	2	0,0327		2	0,2352		2	0,2700		8	0,8455
3	1	0,0585		3	0,3286		3	0,3935		9	0,8662
	2	0,0957		4	0,3984		4	0,5036	10	1	0,1426
	3	0,1111		5	0,4425		5	0,5952		2	0,2834
4	1	0,0884		6	0,4625		6	0,6642		3	0,4206
	2	0,1565	7	1	0,1320		7	0,7086		4	0,5518
	3	0,1983		2	0,2564		8	0,7292		5	0,6735
	4	0,2163		3	0,3676	9	1	0,1407		6	0,7816
5	1	0,1095		4	0,4601		2	0,2784		7	0,8716
	2	0,2029		5	0,5296		3	0,4102	8	0,9397	
	3	0,2727	6	0,5739	4		0,5329	9	0,9839		
	4	0,3162	7	0,5943	5		0,6419	10	1,0048		
	5	0,3355			6		0,7326				

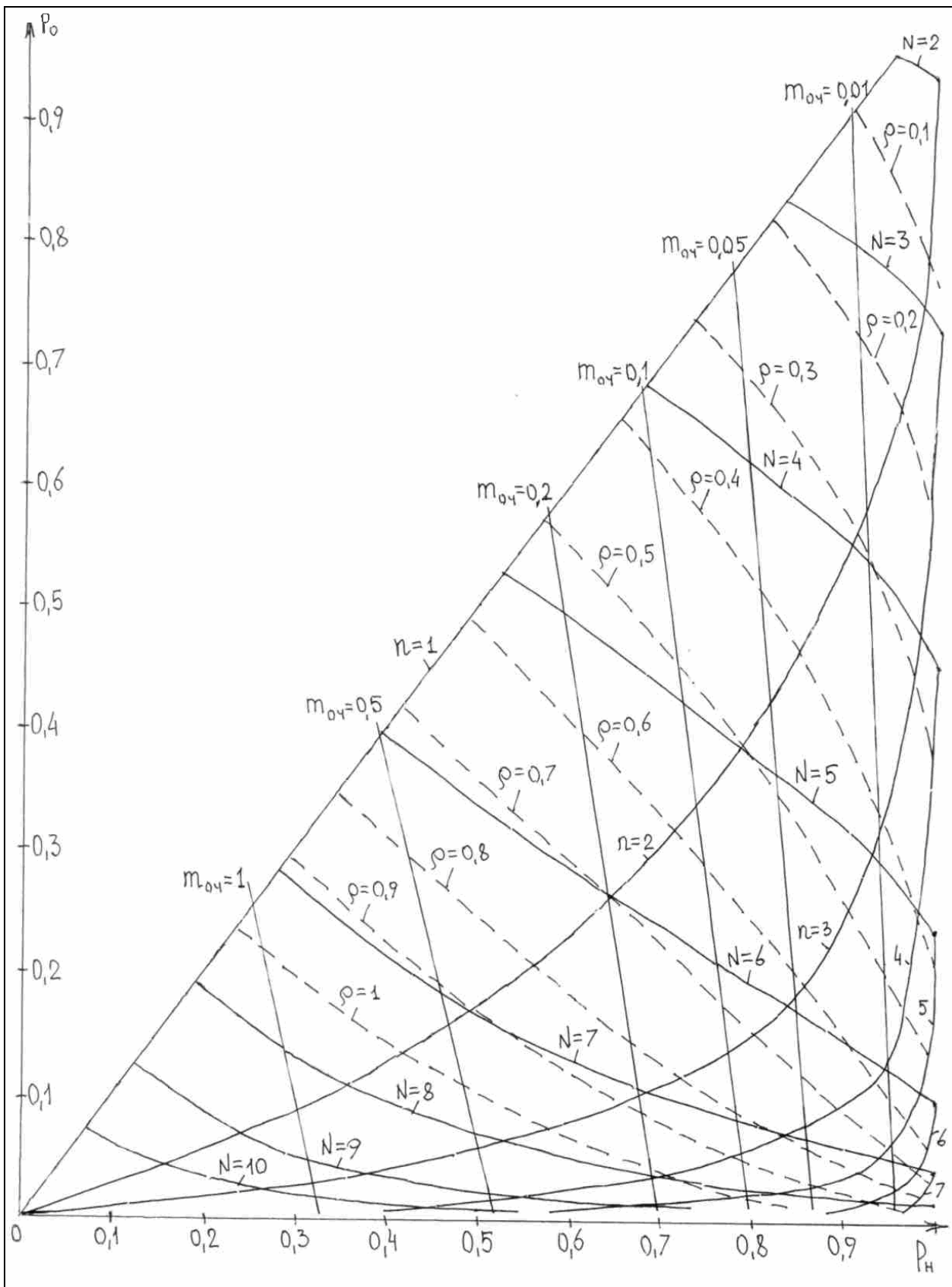


Рис. 1. Номограмма «вероятность незанятости каналов p_0 – вероятности немедленного принятия заявки к обслуживанию p_n » с линиями равных значений числа источников заявок N , числа каналов обслуживания n , величины очереди $m_{оч}$ и нагрузки на канал ρ при вероятности полного останова $p_n=0,001$

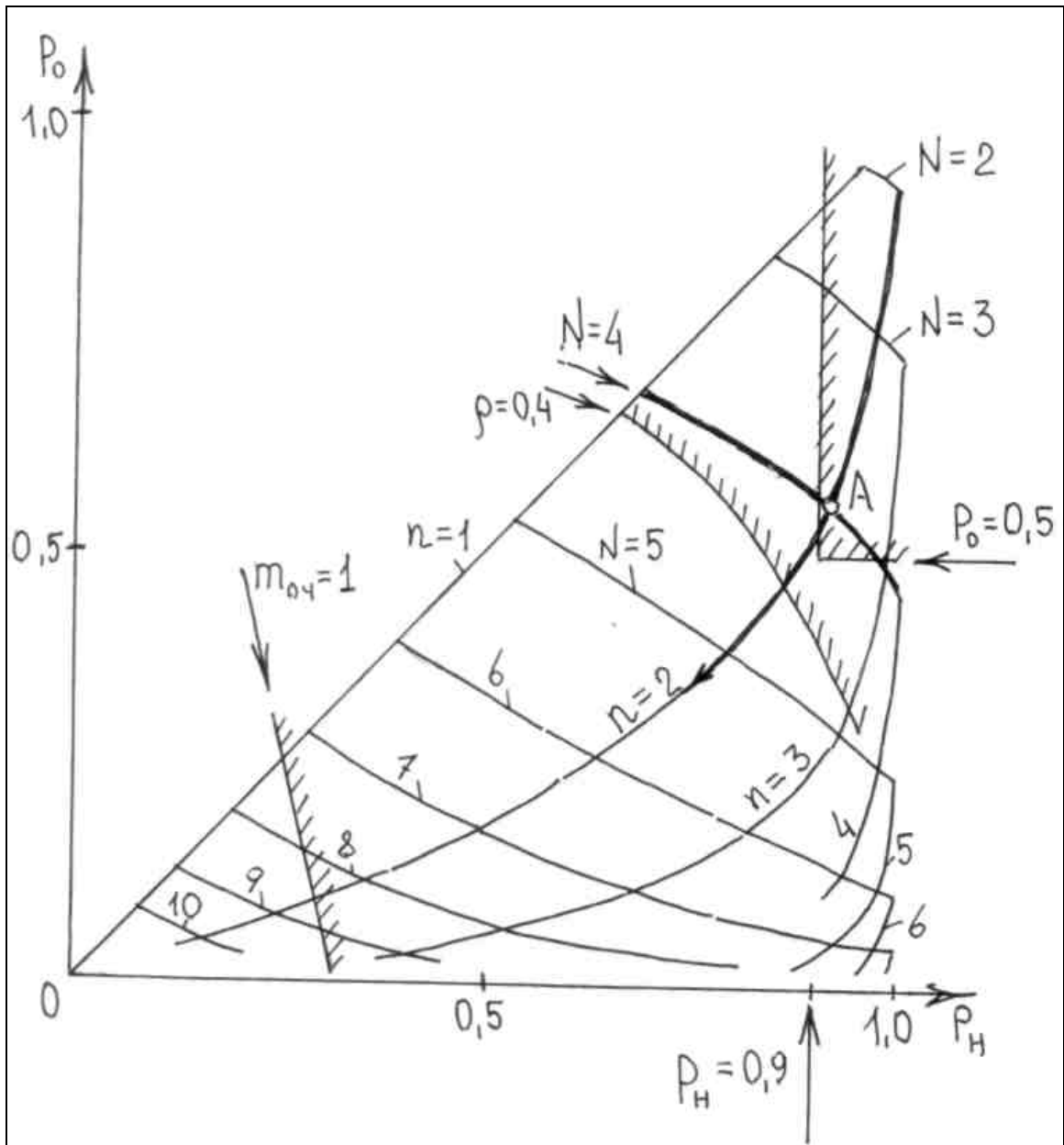


Рис. 2. Пример нахождения числа каналов n при заданных требованиях к характеристикам замкнутой СМО

Учёт готовности каналов обслуживания

Если готовность каналов обслуживания ограниченная и может быть учтена через коэффициент $k_r < 1$, то задача анализа СМО решается следующим образом. Вычисляется действующее число каналов:

$$n^* = k_r n. \quad (14)$$

Затем при заданных параметрах N и β , полагая число каналов n переменной величиной в пределах $n_{min} < n^* < n_{max}$, с использованием выражений (1)–(6) вычисляются характеристики СМО как функции от n . После путём аппроксимации находятся значения характеристик СМО для величины n^* , что и будет решением задачи анализа.

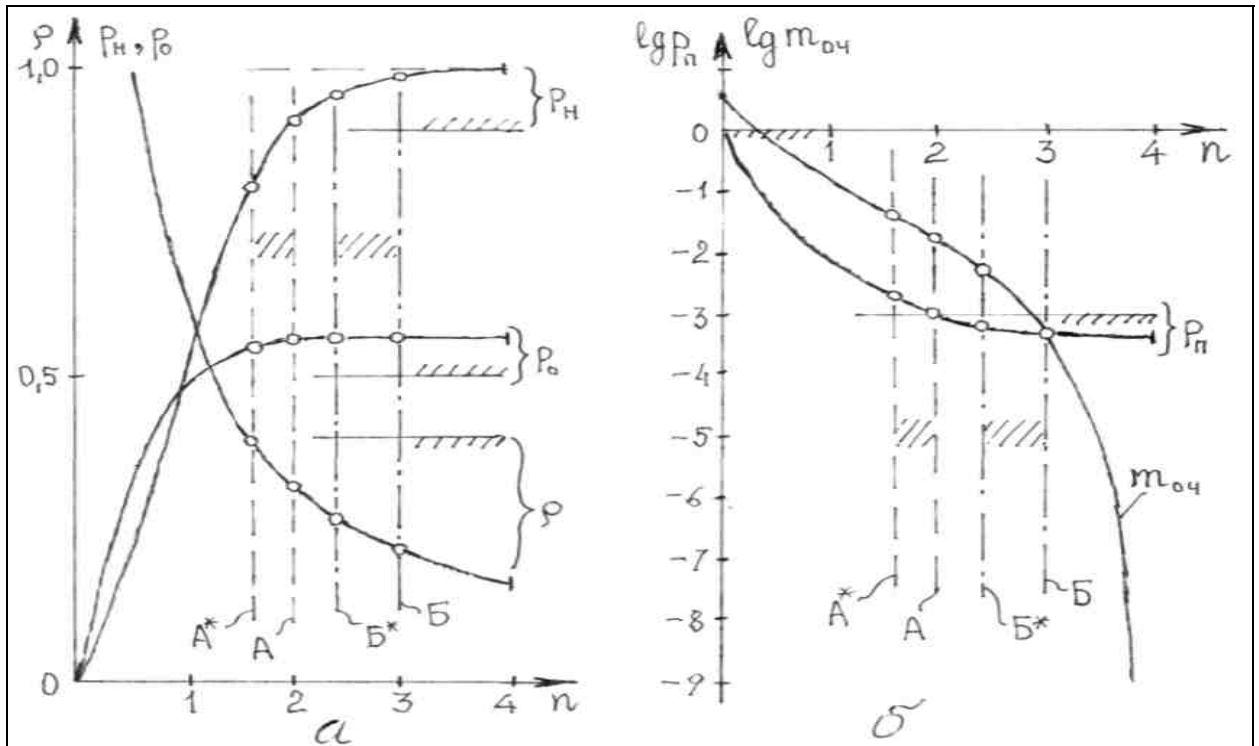


Рис. 3. Пример влияния числа каналов n на характеристики замкнутой СМО при $N=4$ и $\beta=0,1565$ с учётом ограниченной готовности каналов (A – рабочая точка при $n=2$; A^* – рабочая точка при $n^*=1,6$; B – рабочая точка при $n=3$; B^* – рабочая точка при $n^*=2,4$)

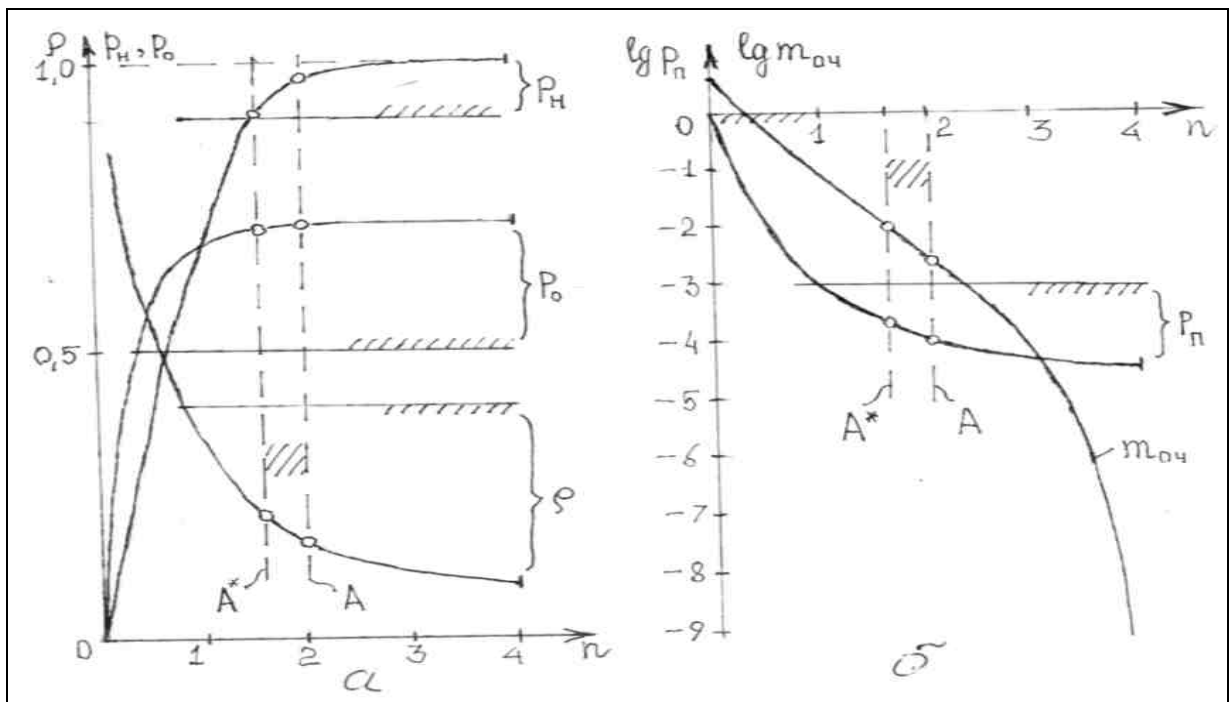


Рис. 4. Пример влияния числа каналов n на характеристики замкнутой СМО при $N=4$ и $\beta=0,085$ с учётом ограниченной готовности каналов (A – рабочая точка при $n=2$; A^* – рабочая точка при $n^*=1,6$)

Для условий рассмотренного примера при $N=4$ и $\beta=0,1565$ зависимости характеристик СМО от числа каналов приведены на рис. 3, рабочая точка А при $n=2$ обозначена пунктирной линией. Если готовность каналов ограничена, например, $k_r=0,8$, то $n^*=1,6$ и рабочая точка А* смещается влево. Тогда $p_0 \approx 0,55$; $p_n \approx 0,0016$; $p_n \approx 0,8$; $m_{оч} \approx 0,03$; $\rho \approx 0,4$ – две характеристики p_n и p_n вышли за пределы допуска.

Решение задачи синтеза СМО при $k_r < 1$ начинается с ранее рассмотренного подхода, когда по номограмме (рис. 1) определяются параметры n и β , как если бы готовность каналов была полной. Затем проводится проверка выполнения условий (7)–(11) при $n^*=k_r n$. Если характеристики СМО остаются в пределах допусков, задача синтеза считается решённой.

Если хотя бы одно из условий (7)–(11) не выполняется, приходится либо увеличить число каналов при той же скорости обслуживания μ , либо увеличить величину μ (то есть снизить приведённую нагрузку β) при прежнем числе каналов обслуживания.

В первом случае для условий рассмотренного примера число каналов нужно увеличить до трёх ($n=3$), оставив $\beta=0,1565$. Тогда число действующих КО $n^*=2,4$ и, согласно рис. 3 (новая рабочая точка Б* обозначена штрих пунктирной линией), характеристики СМО войдут в пределы допусков: $p_0 \approx 0,55$; $p_n \approx 0,0008$; $p_n \approx 0,955$; $m_{оч} \approx 0,015$; $\rho \approx 0,26$.

Во втором случае, оставив $n=2$ ($n^*=1,6$), нужно снизить приведённую нагрузку β . Поскольку из (14) следует, что при $n^*=1,6$ критичной является характеристика p_n , по выражениям (1), (2) и (4) подбираем новую величину $\beta^*=0,085$. Из рис. 4 (новая рабочая точка А* показана штриховой линией) видим, что все характеристики вошли в пределы допусков: $p_0 \approx 0,61$; $p_n \approx 0,0008$; $p_n \approx 0,9$; $m_{оч} \approx 0,01$; $\rho \approx 0,2$. Но в этом случае скорость ремонта агрегатов каждым наладчиком должна быть увеличена: $\mu^*=0,0417/0,085 \approx 0,4902$ час⁻¹. Другими словами, каждый наладчик должен суметь отремонтировать агрегат в среднем не менее, чем за $t_{об}=2,04$ часа. Это может быть достигнуто путём оснащения наладчиков лучшим инструментом, повышением их квалификации и т.п.

Таким образом, приведён способ решения задачи синтеза стандартной замкнутой СМО с использованием номограммы, когда по заданным характеристикам могут быть определены такие параметры, как число каналов обслуживания и приведённая нагрузка, а по ней – необходимая скорость обслуживания заявки. Также показана возможность уточнения параметров СМО при ограниченной готовности её каналов.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966.
3. Таранцев А.А. Инженерные методы теории массового обслуживания. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Наука, 2007.
4. Таранцев А.А. О способе выбора параметров системы массового обслуживания с очередью // Автоматика и телемеханика. 1999. № 7. С. 172–176.
5. Таранцев А.А., Эрьюжев М.В. Об аналитических соотношениях в замкнутых одноканальных системах массового обслуживания // Известия АН. Теория и системы управления. 2004. № 4. С. 84–91.
6. Городские и сельские телефонные сети. Нормы технологического проектирования. РД 45.120-2000 (НТП 112-2000).
7. Шаровар Ф.И. Автоматизированные системы управления и связь в пожарной охране. М.: Радио и связь, 1987.