МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ РЕСУРСНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В.Т. Аверьянов, кандидат военных наук;
Е.С. Топилкин.
Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России

Рассмотрена математическая модель закрепления подразделений пожарной охраны за районными выездами в условиях неопределенности запасов, потребностей, расстояний между складами (базами) и подразделениями, ведущими действия по тушению пожаров, с использованием стохастического программирования. Данный подход позволяет получить оптимальный план прикрепления с учетом минимальных затрат на его реализацию и последующую коррекцию.

Ключевые слова: риск, неопределенность ресурсного обеспечения

MODELING OF PROCESSES OF THE SYSTEM RESOURCE SUPPORT IN TERMS OF RISK AND UNCERTAINTY

V.T. Averyanov; E.S. Topilkin.
Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia

This article describes a mathematical model of the attachment of fire departments in extinguishing fires in an uncertain supply of raw data (inventory needs, the distances between warehouses (databases) and the units of the leading fire-fighting), using stochastic programming. This approach allows to obtain an optimal plan the attachment which the minimum cost of its implementation and subsequent correction.

Key words: risk, uncertainty in resource provision

Выбор решений в реальных ситуациях производится, как правило, в условиях неопределенности или риска при соблюдении различных ограничений, определяемых конкретным содержанием задачи [1].

Модели и методы решения условных экстремальных задач при неполной информации об исходных данных являются предметом дисциплины – стохастического программирования.

Стохастические модели оптимизации обычно более адекватны реальным условиям выбора решений, чем детерминированные постановки экстремальных задач. Каждой детерминированной модели соответствует множество стохастических моделей. Однако учет дополнительной информации об исходных параметрах, естественный в стохастических моделях, существенно усложняет постановку детерминированных задач.

Важнейшим предположением, которое неявно содержится в модели линейного программирования, является предположение о детерминированном характере параметров модели, что равносильно тому, что штаб пожаротушения располагает абсолютно точной информацией о величинах запасов, потребностей, а также расстояниях между складами (базами) и подразделениями пожарной охраны на период тушения пожара.

В процессе ведения действий по тушению пожара эти величины могут существенно отличаться от расчетных (планируемых). В итоге можно предполагать диапазоны, в которых будут изменяться указанные величины в ходе тушения пожара. Канторович Л.В. [2] отмечает, что при перспективном планировании параметры моделей известны нам лишь с той или иной вероятностью. Для получения оптимального плана в таких условиях необходимо применять модели стохастического программирования, в которых все или некоторые параметры рассматриваются как случайные величины. В общем случае параметры транспортной задачи Cij, aij, bij являются функциями случайных параметров θ.

Часто, вместо $Cij(\theta), ai(\theta), bj(\theta)$ рассматривают их средние значения, и задача решается как детерминированная. Можно отметить два существенных недостатка такого подхода. Во-первых, план, выбранный при $\overline{c}ij(\theta), \overline{a}i(\theta) u \overline{b} j(\theta)$ может быть недопустимым ни при одном θ. Этот случай имеет место при дискретном распределении указанных параметров. Во-вторых, такой подход может привести к искажению сущности процесса, поскольку с помощью детерминированных параметров нельзя описать возможность корректировки плана [3, 4].

Корректировка планов в процессе их реализации является следствием недостатков планирования. Корректировка органически присуща выбору и планированию действий в условиях неопределенности. Важно стремиться к принятию планов, требующих минимальные общие затраты на их реализацию и коррекцию.

В рамках детерминированных моделей невозможно объединить два этапа – этап принятия плана и этап его корректировки. Переход от детерминированных величин к случайным, являющимися причинами коррекции, позволяет получить модели, объединяющие два указанных выше этапа планирования, то есть дает возможность говорить о моделях выбора планов, устойчивых к имеющей место неопределенности, минимизирующих ожидаемые затраты на реализацию и коррекцию. В этом состоит существо моделей двухэтапного стохастического программирования, отражающих следующие наиболее характерные особенности планирования в условиях неопределенности:

– вероятный характер исходной информации;

– корректировка ранее выбранного плана по мере уточнения информации;

– выбор предварительного плана с учетом его будущей коррекции.

Следует отметить, что в практике планирования часто требуются дополнительные пояснения того, как появляются вероятности. Ситуации здесь во многом напоминают те, с которыми приходится сталкиваться в теории статистических решений при определении априорных законов распределения. При планировании действий по тушению пожаров может оказаться необходимым характеризовать вероятностями величины, которые наблюдаются малое число раз, недостаточное для того, чтобы получить достоверные частотные интерпретации вероятностей.

В данном случае может оказаться приемлемым способ задания вероятностей, который применяется в сетевом планировании. Значение случайных величин (например, объемы запасов и потребностей в ходе ведения действий по тушению пожаров) определяются путем опроса экспертов, каждый из которых дает три оценки – оптимистическую, пессимистическую и наиболее вероятную. Получаемый в результате этого разброс оценок позволяет сформировать определенный закон распределения [4].

В [5] рассмотрена двухэтапная стохастическая транспортная задача, в которой случайными величинами являются потребности пожарных подразделений b_j и запасы материально-технических средств на складах (базах) a_i. Те и другие случайные величины предполагаются дискретно распределенными. При этом возможные объемы запасов на i-м складе:

$$a_{i1} < a_{i2} < ... < a_i ч_{\text{i}}$$

и возможные реализации потребности у j- го потребителя:

$$b_{j1} < b_{j2} < ... < b_j s_j \,.$$

Величина a_{ie} реализуется с вероятностью ϑ_{ie}, а b_{jk} – с вероятностью ρ_{jk}. В транспортной задаче двухэтапного стохастического программирования требуется найти такой план прикрепления подразделений пожарной охраны на снабжение, который минимизирует ожидаемую суммарную транспортную работу на его реализацию и коррекцию.

Целевая функция будет представлена в виде

$$F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}[q_j^- \sum_{k=1}^{sj} \rho_{jk}\vartheta_{jk} + q_j^+ \sum_{k=1}^{sj} \rho_{jk}\vartheta_{jk}^+] + \sum_{i=1}^{m}[h_i^- \sum_{\text{e}=1}^{ч\text{i}} \vartheta_{\text{ie}}\vartheta_{ie}^- + h_i^+ \sum_{e-1}^{ei} \vartheta_{ie}^-\vartheta_{ie}^+] \Rightarrow \min, \quad (1)$$

Ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \vartheta_{ik}^+ - \vartheta_{ik}^- = a_{ik}, e = 1,..., ч_{\text{i}}; \text{i} = 1,...; \text{m}; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \vartheta_{jk}^+ - \vartheta_{jk}^- = b_{jk}, k = 1,..., s_j; \text{j} = 1,..., \text{n}; \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0; \vartheta_{\text{ie}}^+, \vartheta_{ie}^- \geq 0; \text{u}_{\text{jk}}^+, u_{ij}^- \geq 0, \quad (4)$$

где $u_{jk}^- u \text{u}_{\text{jk}}^+$ – величины дефицита и избытка материально-технических средств у j-го потребителя; $\vartheta_{ie}^- u \vartheta_{\text{ie}}^+$ – величины дефицита и избытка материально-технических средств на i-м складе; $q_j^- u \text{h}_{\text{i}}^-$ – штрафы за единицу недостающих материально-технических средств; $q_j^+ u \text{h}_{\text{j}}^+$ – штрафы за единицу избыточных материально-технических средств.

Заметим, что величинами $q_j^-, q_j^+, h_i^-, h_i^+$ можно устанавливать приоритет снабжения подразделений пожарной охраны, выбирая их значения в соответствии с важностью каждого j-го потребителя (расположения на главном направлении и др.) и i-го склада (необходимость передислокации).

Двухэтапная задача (1)–(4) эквивалентна следующей транспортной задаче на сети с промежуточными пунктами (рис.). Поставим в соответствие i складу $ч_{\text{i}}$ фиктивных поставщиков с объемами запасов:

$$\alpha_{1i} = a_{i1}, \alpha_{2i} = a_{i2} - a_{i1}, ..., \alpha_{ei} = a_{ie} = a_{ie} - a_i, e^{-1}, ...,$$
$$\alpha_{\text{чi,i}} = a_{i,\text{i}} - a_{i,\text{чi}}^{-1},$$

а j-потребителю S_j фиктивных потребителей с объемами потребностей:

$$\beta_{j1} = b_{j1}, \beta_{j2}, \beta_{j2} = b_{j2} - b_{j1}, ..., \beta_{jk} = b_{jk} b_{jk} - b_{j,k-1}, ...,$$
$$\beta_{j,sj} = b_{j,sj} - b_{j,sj-1.}$$

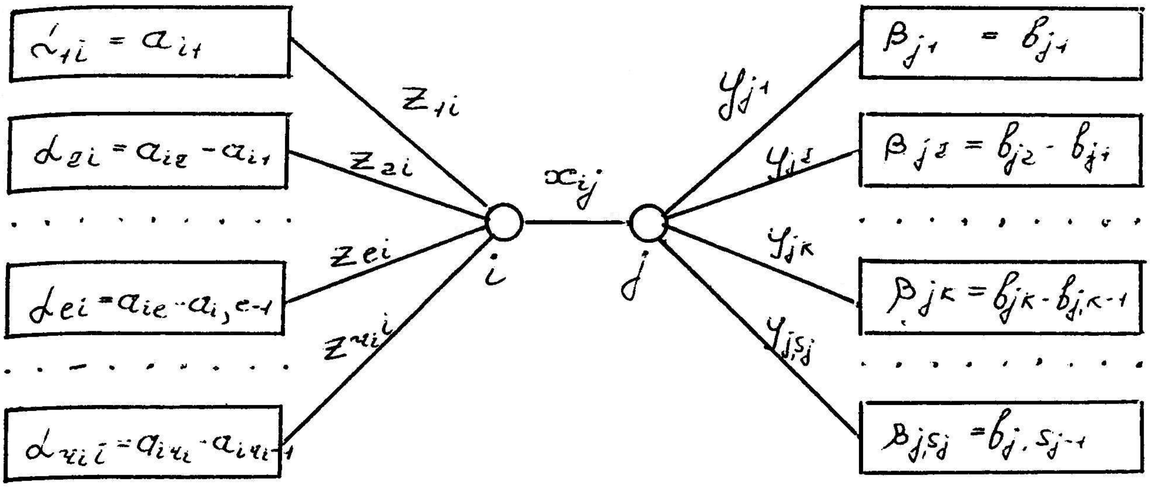

Рис. **Транспортная задача на сети с промежуточными пунктами**

Рассмотрим транспортную сеть, в которой с *е*-го фиктивного склада доставляется в *i*-й промежуточный пункт z_{ei} единиц материально-технических средств. Из i-го промежуточного пункта x_{ij} единиц материально-технических средств доставляется в *j*-й промежуточный пункт, а затем материально-технические средства доставляются *к* потребителю в количестве y_{jk}. Реальные *i*-й склад и *j* й потребитель в этой сети являются промежуточными пунктами.

Следовательно, величины z_{ei}, x_{ij}, y_{jk}, связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sum_{\text{e}=1}^{\text{чi}} z_{ei} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0, i = 1, ..., m; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{k=1}^{si} y_{\text{jk}} = 0, j = 1, ..., n; \tag{6}$$

$$0 \le z_{ei} \le \alpha_{0i}, e = 1, ..., ч_{\text{i}}; \tag{7}$$

$$0 \le y_{\mathrm{jk}} \le \beta_{jk}, k = 1,..., s_j; \tag{8}$$

$$x_{ij} \ge 0. \tag{9}$$

Обозначим через w_{ei} вероятность того, что величина a_i превысит a_{ei}, то есть

$$w_{ei} = 1 - \sum_{\lambda=1}^{e} w_{i\lambda},$$

а p_{jr} – вероятность того, что величина b_j превысит b_{jk}

$$p_{jk} = 1 - \sum_{\mu-1}^{k} p_{j\mu}.$$

Тогда величина $\alpha_{ei} - z_{ei}$ с вероятностью w_{ti} равна избытку материально-технических средств на i-м складе и с вероятностью $1 - w_{ti}$ недостатку материально-технических средств в i-м пункте.

Следовательно, ожидаемые затраты от избытка материально-технических средств на i-м складе равны $h_i^+ w_{ei}(\alpha_{ei} - z_{ei})$, а от недостатка материально-технических средств на i-м складе $h_i^-(1 - w_{ei})z_{ti}$. Аналогично определяются ожидаемы «затраты», связанные с недостатком и избытком материально-технических средств у j-го потребителя.

Математическое ожидание суммарной транспортной работы определяется выражением:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\mathrm{c}=1}^{\mathrm{ч_i}} [\mathrm{h_i^+} w_{ei}(\alpha_{ei} - z_{ei}) + h_i^-(1 - w_{ei})z_{ei}] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s_j} [q_j^+ p_{jk}(\beta_{jk} - y_{\mathrm{jk}}) + q_j^-(1 - p_{jk})y_{\mathrm{jk}}].$$

Исключим слагаемые, не зависящие от параметров управления, и запишем целевой функционал сетевой транспортной задачи

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\mathrm{e}=1}^{\mathrm{ч_i}} [\mathrm{h_i^-}(1 - w_{ei}) - h_i^+ w_{ei}]z_{ei} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s_j} [q_j^-(1 - p_{jk}) - q_j^+ p_{jk}]y_{\mathrm{jk}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Этот функционал необходимо минимизировать при ограничениях (5)-(9).

Применительно к возможной оперативной обстановке на пожаре, особенно в начальный период его тушения модель (5)–(9), (10) может быть упрощена, поскольку величины запасов на стационарных складах будут детерминированными, что нельзя сказать относительно потребностей подразделений пожарной охраны, которые будут случайным образом меняться в зависимости от хода тушения пожара.

В этом случае целевой функционал двухэтапной транспортной задачи записывается в виде:

$$\sum_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{m}c_{ij}\cdot x_{ij}+q_j^{-}\sum_{k=1}^{s_j}p_{jk}ч_{\mathrm{jk}}^{-}+q_j^{+}\sum_{k=1}^{s_j}p_{jk}u_{jk}^{+}\}$$

или, исключая u_{jk}^{+} с помощью условия (3),

$$\sum_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{m}c_{ij}+q_j^{+})x_{ij}+(q_j^{-}+q_j^{+})\sum_{k=1}^{s_j}p_{jk}u_{\mathrm{jk}}^{-}\}-\sum_{j=1}^{n}q_j^{+}\bar{b}_j,$$

где $\bar{b}_j=M\text{Ъ}_{\mathrm{j}}=\sum_{k=1}^{s_j}p_{jk}b_{jk}$ – член, не содержащий параметров управления, поэтому в формальной модели он может быть опущен.

Таким образом, двухэтапную стохастическую транспортную задачу с дискретно распределенными потребностями можно представить следующей моделью линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{m}(c_{ij}+q_j^{+})x_{ij}+(q_j^{-}+q_j^{+})\sum_{k=1}^{s_j}p_{jk}u_{\mathrm{jk}}^{-}\}\Rightarrow \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, i=1,...,m;$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}+u_{\mathrm{jk}}^{+}-u_{\mathrm{jk}}^{-}=b_{jk}, k=1,...,s_j;$$

$$x_{ij}\geq 0; и_{\mathrm{jk}}^{-}\geq 0; и_{\mathrm{jk}}^{+}\geq 0.$$

В случае если достоверные оценки вероятностей $p_{jk}u\vartheta_{\mathrm{ie}}$ определить не удается, но известными являются диапазоны – $A_i u\beta_{\mathrm{j}}$, в которых могут находиться значения запасов материально-технических средств a_i и потребностей b_j

$$a_i\in A_i; \mathrm{A_i}=a_{\max_i}-a_{\min_i};$$

$$b_j\in B_{\mathrm{j}}; \mathrm{B_j}=b_{\max_j}-b_{\min_j};$$

Предлагается решать задачу прикрепления подразделений пожарной охраны для снабжения на основе следующей игровой методики. Каждый из интервалов A_i и B_j разбивается на $ч_i$ и s_j равномерных интервалов, то есть в соответствие a_i и b_j ставится

$a_{ie} u \mathrm{b}_{\mathrm{jk}}$ значений запасов и потребностей соответственно $(e = 1,...,ч_{\mathrm{i}}; \mathrm{k} = 1,...,\mathrm{s}_{\mathrm{j}})$. Затем $T = \prod_{i=1}^{m} ч_{\mathrm{i}} \cdot \prod_{j=1_{sj}}^{n}$ раз решается задача прикрепления, как транспортная задача вида

$$F(p_t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \Rightarrow \min, t = 1,...,T; \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_{ie}, i = 1,...m; \mathrm{e} = 1,...,\mathrm{ч}_{\mathrm{i}}; \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_{jk}, j = 1,...,n; \mathrm{k} = 1,...,\mathrm{s}_{\mathrm{j}}; \tag{13}$$

$$x_{ij} \ge 0, \tag{14}$$

где $D_t = (a_{ie}, b_{jk})$ – вектор значений правых частей ограничений. В результате Т решений задачи (11)–(14) формируется матрица R размерностью (ТxТ), элементами которой являются следующие разности

$$\Delta d_u = \left| F(p_d) - F(p_u) \right|, d = 1,...,T; u = 1,...,\mathrm{T}.$$

Элементы матрицы симметричны относительно главной диагонали, поскольку $\Delta d_u = \Delta_u d$

$$R = \begin{Vmatrix} 0 & |F(a_{11}) - F(a_{12})| & \ldots & |F(a_{11}) - F(a_{1ч_1})| & \ldots & |F(a_{11}) - F(b_{m}, s_{n})| \\ & 0 & \ldots & |F(a_{12}) - F(a_{1ч_1})| & \ldots & |F(a_{12}) - F(b_{m}, s_{n})| \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & 0 & \ldots & |F(a_{ie}) - F(b_{m}, s_{n})| \\ & & & & \ldots & \ldots \\ & & & & & 0 \end{Vmatrix}$$

Оптимальное решение $x_{опт}$, выбирается на основе минимаксного критерия. Вектор $x_{опт} = x_d$ соответствует d-му решению задачи прикрепления (11)–(14), соответствующему величине

$$\Delta_{onm} = \min_{d} \max_{u} \Delta d_u .$$

Подобный игровой подход к решению задачи прикрепления можно применять и в случае изменения величин c_{ij}, что имеет место в результате передислокации частей (подразделений) пожарной охраны и складов в ходе ведения действий по тушению пожаров.

Достоинством описанного подхода является отсутствие необходимости задания вероятностного распределения величин запасов и потребностей, что необходимо при решении задачи прикрепления методами стохастического программирования.

Недостатком является большой объем вычислений, которые необходимо выполнить для получения решения. Для того чтобы не решать задачу (11)–(14) T раз с помощью какого-либо алгоритма решения транспортной задачи, необходимо применять двойственный симплекс-метод [4], который позволяет при изменении параметров модели не решать задачу заново, а лишь корректировать предыдущее решение, что существенно упрощает применение описанной методики.

Литература

1. Исследование операций. Модели и применение: пер. с англ. / под ред. И.М. Макарова, И.М. Бескровного. М.: Мир, 1981. Т. 2. 677 с.

2. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

3. Беллман Р. Динамическое программирование: пер. с англ. / под ред. Н.Н. Воробьева. М.: ИЛ, 1960. 400 с.

4. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования: пер. с англ. / под ред. А.А. Первозванского. М.: Наука, 1965. 458 с.

5. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей: пер. с англ. / под ред. Б.Г. Сушкова. М.: Мир, 1984. 496 с.