МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

О.В. Щербаков, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ;
А.А. Таранцев, доктор технических наук, профессор.
Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России

Рассмотрены модели одно- и многоканальных незамкнутых систем массового обслуживания с очередью. Приведён порядок получения аналитических выражений для оценки показателей работы таких систем. Показана возможность применения полученных выражений для решения задач анализа и синтеза вычислительных систем.

Ключевые слова: система массового обслуживания, вычислительная система, требование, обслуживающий прибор, очередь

METHOD OF DETERMINATION OF INDEX OF COMPUTATION SYSTEM

O.V. Scherbakov; A.A. Tarantsev.
Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia

Examined the models of single and multi-channel unclosed queue with matching. The order of obtaining analytical expressions for assess the performance of such systems. The possibility of using these expressions to solve problems of analysis and synthesis of computation systems.

Keywords: queue with matching, computation systems, server, queue

Основу построения автоматизированных систем управления силами и средствами МЧС России и автоматизированных систем мониторинга окружающей среды составляют вычислительные системы (ВС). Они также находят широкое применение в автоматических и автоматизированных системах различного назначения, в которых требуется обеспечить высокую эффективность управления. К таким системам относятся, например, системы военного назначения, системы управления ядерными реакторами, системы управления нефтегазовыми комплексами и т.д. Поэтому возникает необходимость определения показателей, характеризующих такие системы. Вычислительные системы, на которые возложено выполнение ответственных функций, характеризуются следующими свойствами:

– имеется большое количество процессоров, которые функционируют в конвейерном, векторном или матричном соединении, что обеспечивает работу ВС в мультипрограммном режиме, одновременно обрабатывая множество поступающих требований;

– характеризуются большими объемами оперативной памяти, которая может содержать терабайт, петабайт и даже экзабайт информации.

Причем выборка из оперативной памяти информации может осуществляться за наносекунду, пикосекунду и даже фемтосекунду. Кроме того, объем внешней памяти может быть практически неограниченным, а время передачи информации в оперативную память может быть небольшим. Так как функционирование ВС заключается в обработке, поступающей в систему информации в виде требований, то такую ВС следует рассматривать как систему массового обслуживания (СМО). Учитывая перечисленные свойства, такую систему следует рассматривать как СМО с неограниченной очередью, в которой имеется n приборов, обслуживающих поступающие требования. В связи с этим возникает необходимость определения показателей такой СМО, которые условно можно разделить на две группы: показатели, характеризующие качество функционирования СМО (функциональные показатели) и показатели, характеризующие качество обеспечения выполнения функциональных показателей (конструктивные показатели). Рассмотрим метод определения функциональных показателей.

Рассмотрим случай для СМО при n=1. В этом случае СМО представляет систему с неограниченной очередью с одним обслуживающим прибором. Определение функциональных показателей будем осуществлять при следующих допущениях:

– СМО функционирует в стационарном режиме;

– поток поступающих требований является простейшим с интенсивностью *л*;

– время обслуживания требований подчиняется экспоненциальному закону с интенсивностью μ. Для определения вероятностей состояний СМО используем результаты, полученные при исследовании схемы гибели и размножения [1, 2]. Для этой схемы вероятности пребывания системы в K состоянии равна:

$$P_K = л_0\, л_1 \ldots л_{K-1} P_0/\mu_1\mu_2 \ldots \mu_K,$$

где P_0 – вероятность пребывания СМО в состоянии «0», которое означает отсутствие требований в СМО.

В этом случае графическая модель СМО показана на рис. 1, интенсивности переходов из одного состояния в другое одинаковы и равны *л* и μ. Тогда:

$$P_к=(л/\mu)^K P_0.$$

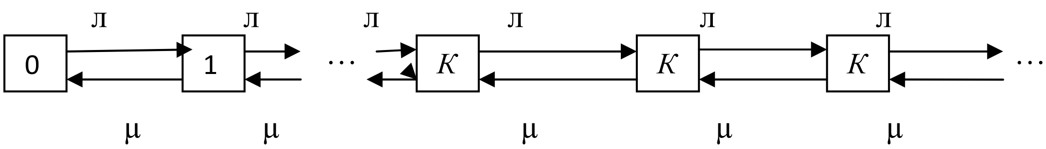

Рис. 1

Функциональные показатели СМО можно разделить на две группы. Первая группа показателей характеризует эффективность функционирования СМО в целом. Показателями этой группы являются следующие: Q=(1-P_n) – относительная пропускная способность системы; P_n – вероятность потери поступившего в СМО требования; A=лQ – абсолютная пропускная способность системы. Так как СМО имеет бесконечную очередь, то очевидно P_n=0 и поэтому Q=1, а A=л. Вторая группа показателей характеризует показатели, которые позволяют оценивать процесс функционирования отдельных элементов СМО и системы в целом. К таким показателям относятся:

– вероятности P_i состояний СМО (i=0,1, … K,…);

– математическое ожидание (N) и дисперсия (D_1) количества требований, находящихся в СМО;

– математическое ожидание (M) и дисперсия (D_2) количества требований, находящихся в очереди;

– математическое ожидание количества требований, находящихся на обслуживании (S);

– среднее время пребывания требования в СМО ($t_{сис}$);

– среднее время пребывания требования в очереди ($t_{оч}$);

– вероятность того, что в системе будет больше, чем n требований – P^*;

– вероятность того, что время пребывания требования в СМО *ф* будет меньше t ($ф_{сис}$);

– вероятность того, что время пребывания требования в очереди *ф* будет меньше t ($ф_{оч}$);

– P_0 – вероятность того, что в СМО отсутствуют требования;

– P_1 – вероятность того, что канал занят обслуживанием требования;

– $P_{K\geq 1}$ – вероятность того, что в СМО имеются требования, находящиеся на обслуживании;

– $P_{K\geq 2}$ – вероятность того, что в СМО имеются требования, которые находятся в очереди.

Определим показатели, указанные выше. Для этого введем следующие показатели л/μ=с – приведенная интенсивность и (μ-л)=μ(1–с)=щ – интенсивность функционирования СМО. Рассмотрим значения этих величин. Если с>1, то это означает, что в среднем количество поступающих требований больше, чем количество обслуженных требований и, следовательно, очередь будет неограниченно расти, а СМО не будет функционировать. Если с<1, то это означает, в среднем количество поступающих требований меньше, чем среднее количество обслуженных требований и поэтому в СМО будет находиться конечное число требований и СМО будет функционировать. Если же с=1, то в этом случае очередь будет неограниченно расти. Данное обстоятельство объясняется тем, что обслуживание поступившего требования начинается только после поступления требования в СМО и, в силу ординарности потока поступающих требований и экспоненциального времени обслуживания требований, существует определенная задержка во времени дt, в течение которой может поступить еще одно требование. Это обстоятельство и определяет неограниченный рост очереди. Далее рассмотрим величину 1/щ=1/(μ(1–с)). Эту величину можно представить в следующем виде: $t_{обсл.}$/(1–с), где $t_{обсл.}$ – среднее время обслуживания требования. Поэтому величину (1–с) можно рассматривать как меру отклонения от среднего значения показателей СМО.

Вероятности состояний СМО, которая показана на рис. 1, очевидно равны $P_к$=с$^K P_0$. Далее можно записать следующее выражение:

$$P_0(1+с+с^2+с^3+\ldots+с^K+\ldots)=1.$$

Так как с<1, то ряд геометрической прогрессии сходится и сумма этого ряда равна (1-с). Поэтому окончательно получим:

$$P_0=1/(1-с).$$

Очевидно, что P_1=с(1-с) и P_2=с^2(1-с).

Далее, перейдем к определению других функциональных показателей второй группы. Рассмотрим отношение л/(μ-л). Это отношение характеризует отношение среднего числа поступивших требований в единицу времени в СМО к среднему числу требований, покинувших СМО за это же время и, следовательно, представляет среднее число требований N, находящихся в СМО. Поэтому:

$$N=л/(μ-л)=с/(1–с).$$

Определим вероятность того, что в СМО находятся требования $P_{\geq 1}$. Очевидно, что $P_о$+$P_{\geq 1}$=1 и поэтому:

$$P_{\geq 1}=с.$$

Одно требование находится на обслуживании, остальные требования находятся в очереди. Определим вероятность того, что в СМО имеются требования, находящиеся в очереди $P_{K\geq 2}$. Очевидно, что $P_0+P_1+P_{K\geq 2}=1$ и поэтому $(1\text{-с})+(1\text{-с})\text{с}+P_{K\geq 2}=1$. Тогда $P_{K\geq 2}=1\text{-}(1\text{-с})(1\text{+с})=1–(1–\text{с}^2)$. Окончательно получим:

$$P_{K\geq 2}=\text{с}^2.$$

Определим вероятность того, что количество требований в СМО будет больше некоторого количества n - P^*. Эта вероятность равна:

$$P^*=(1\text{-с})(\text{с}^{n+1}+\ldots)=(1\text{-с})\text{с}^{n+1}(1+\text{с}+\ldots)=(1\text{-с})\text{с}^{n+1}/(1\text{-с})=\text{с}^{n+1}.$$

Если предположить, что количество возможных состояний в СМО равно n, то это означает, что рассматривается одноканальная СМО с потерями, для которой величина P_n представляет вероятность потери требования, которое поступило в СМО. Поэтому относительная пропускная способность СМО равна $Q=1\text{-}P_n$, а абсолютная пропускная способность равна $A=\text{л}Q$. Вероятность потери требований при больших n и небольших c будет близка к истинному значению для СМО с потерями.

Определим среднее число требований, находящихся на обслуживании. Так как в СМО имеется только один обслуживающий прибор, то $0\cdot P_{\text{o}}+1\cdot P_{\geq 1}=\text{с}$. Поэтому S=с.

Далее, определим среднее число требований, находящихся в очереди. Для этого из среднего количества требований, находящихся в СМО, необходимо вычесть среднее число требований, находящихся на обслуживании. Поэтому $M = \text{с}/(1–\text{с})–\text{с}=\text{с}^2(1–\text{с})=\text{с}N$.

Рассмотрим величину $\mu/(\mu\text{-л})$, которая характеризует потенциальную возможность эффективности функционирования СМО. Эта величина показывает средний процент требований, которые могли бы быть обработаны, и поэтому характеризует отклонение от среднего количества требований, находящихся в СМО. Очевидно, эта величина равна $1/(1–\text{с})=1/P_0$ и ее можно использовать при оценке дисперсии. Следовательно, для дисперсии количества требований, находящихся в СМО, можно записать:

$$D_1=\text{л}/(\mu\text{-л})\mu/(\mu\text{-л})=\text{с}/(1–\text{с})^2=N/P_0. \quad (1)$$

Дисперсию D_1 можно определить, используя известную формулу:

$$D_1=Z–N^2,$$

где Z – второй начальный момент. В результате преобразований будет получена формула (1).

Определим дисперсию для количества требований, находящихся в очереди. Эта величина может быть получена следующим образом. Необходимо учесть вероятности P_0 и P_1, определяющие состояния, которые не относятся к очереди. Поэтому можно записать

$$D_2=\text{л}/(\mu\text{-л})\cdot\mu/(\mu\text{-л})\cdot\mu/(\mu\text{-л})=\text{с}/(1\text{-с})\cdot 1/(1\text{-с})^2 =MP_0^{-1}P_1^{-1}.$$

В случае необходимости можно определить среднее квадратичное отклонение $у$ и коэффициент вариации по полученным формулам для дисперсии.

Далее, определим среднее время пребывания требования в СМО. Для этого необходимо обработать среднее количество требований, находящихся СМО, и обработать еще одно требование. Первая величина будет равна $1/\mu\cdot\text{с}/(1–\text{с})$. Вторая величина будет равна $1/\mu\cdot(P_0+P_{\geq 1})$. Очевидно, что $P_0+P_{\geq 1}=(1–\text{с})+\text{с}=1$.

Поэтому можно записать: $t_{\text{сис.}}=1/\mu\cdot\text{с}/(1–\text{с})+1/\mu=1/\mu\cdot[\text{с}/(1–\text{с})+1]=1/\mu\cdot 1/(1–\text{с})$. Далее представим полученную величину $t_{\text{сис.}}$ в следующем виде $\text{л}/(\text{л}\mu)\cdot 1/(1–\text{с})$. Тогда окончательно получим:

$$t_{\text{сис.}}=1/\text{л}\cdot\text{с}/(1–\text{с}). \quad (2)$$

Очевидно, формулу (2) можно представить в следующем виде:

$$t_{\text{сис.}} = N/\text{л}. \qquad (3)$$

Полученные формулы (2) и (3) являются формулами Литтла.

Далее определим среднее время пребывания требования в очереди. Для этого необходимо обработать среднее количество требований, находящихся в очереди и перевести еще одно требование из очереди на обработку. Первая величина будет равна $1/\text{μ}\cdot\text{с}^2/(1–\text{с})$. Вторая величина будет равна $1/\text{μ}\cdot P_{\geq 1}=1/\text{μ}\cdot\text{с}$. Поэтому можно записать:

$$t_{\text{оч}}=1/\text{μ}\cdot\text{с}^2/(1–\text{с})+1/\text{μ}\cdot\text{с} = 1/\text{μ}\cdot[\text{с}^2/(1\text{-с})+\text{с}] = 1/\text{μ}\cdot\text{с}/(1–\text{с}).$$

Далее представим полученную величину в следующем виде $\text{л}/(\text{лμ})\cdot[\text{с}/(1–\text{с})]$. Тогда окончательно получим:

$$t_{\text{оч}}=1/\text{л}\cdot\text{с}^2/(1–\text{с}). \qquad (4)$$

Очевидно формулу (12) можно представить в следующем виде:

$$t_{\text{оч}}=1/\text{л}\cdot M. \qquad (5)$$

Полученные формулы (4) и (5) также являются формулами Литтла.

Далее определим вероятности того, что требования будут покидать очередь при условии, что в СМО будут поступать требования. Очевидно, эти вероятности определяются по экспоненциальному закону с интенсивностью μ-л.

Определим вероятность того, что время пребывания требования в очереди будет больше t. Эта вероятность равна:

$$P_{\text{оч}}(x\geq t)=P_tP_b,$$

где P_t – вероятность того, что в системе имеются требования $P_t=P_{\geq 1}=\text{с}$; P_b – вероятность того, что время обслуживания требования будет больше t, при условии, что в СМО поступают новые требования. Поэтому $P_b=\exp((\text{μ-л})t))$. Окончательно $P_{\text{оч}}=\text{с}\exp((\text{μ-л})t)$. Поэтому вероятность того, что время пребывания требования в очереди будет меньше t, равна:

$$P(\text{ф}<t)=1–\text{с}\exp((\text{μ-л})t).$$

Запишем следующее выражение: $P(\text{ф}\geq t)=(P_0+P_1)\exp((\text{μ-л})t)=((1–\text{с})+\text{с})\exp((\text{μ-л})t)$. Поэтому вероятность того, что требование покинет СМО за время t, будет равна:

$$P_{\text{сист.}}(\text{ф}<t) =1–\exp((\text{μ-л})t).$$

Теперь рассмотрим двухканальную СМО с неограниченной очередью. Графическая модель показана на рис. 2.

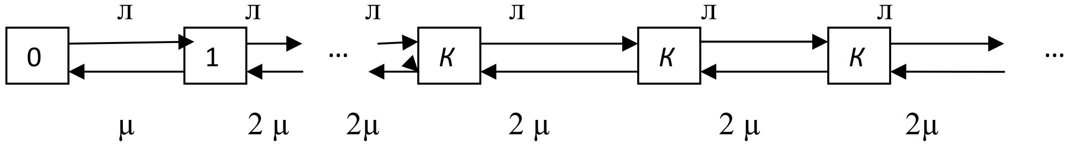

Рис. 2

Как видно из рис. 2 эта модель соответствует модели, показанной на рис. 1, и только переход из состояния «1» в состояние «0» имеет две возможных интенсивности перехода

$\mu^*=\mu$ и $\mu^*=2\mu$. Рассмотрим второй случай. В этом случае, когда в СМО имеется только одно требование, которое обрабатывается, эту обработку могут осуществлять оба обслуживающих прибора. Такое возможно в системах автоматизированного управления, где для обработки поступившего требования используются две вычислительные системы. В этом случае для определения показателей СМО могут быть использованы ранее полученные формульные зависимости, в которых интенсивность обслуживания требований $\mu_2=2\mu$. Необходимо только проверить выполнение неравенства $л/(2\mu)<1$. Очевидно, такой подход можно использовать при любом количестве обслуживающих приборов n, только необходимо проверить выполнение неравенства $л/(n\mu)<1$.

Следует также отметить, что рассмотренный подход может быть использован при приближенной оценке показателей СМО с двумя обслуживающими приборами, когда интенсивность перехода из состояния «1» в состояние «0» равна μ. В этом случае полученные показатели, характеризующие СМО, будут несколько завышены.

Используя полученные аналитические зависимости можно определить функциональные показатели ВС при различных вариантах построения системы с целью выбора наилучшего варианта. При проектировании ВС, используемых в системах управления, необходимо определение следующих показателей:

– n – количество приборов обработки поступающих требований;

– μ – интенсивность обслуживания поступающих требований одним обслуживающим прибором;

– C – объем информации имеющийся в поступающих требованиях, который необходимо разместить в оперативной памяти ВС;

– $t_{сис.}$– среднее время пребывания требования в ВС, которое определяет время выдачи информации пользователям;

– $P_{сис}$ – вероятность того, что время пребывания требования в системе будет меньше заданного времени $t_{зад}$.

В качестве исходных данных для проведения расчетов этих показателей необходимо иметь:

1. Интенсивность потока требований, поступающих в ВС – $л$. Данная величина должна быть задана для обычных условий работы системы управления. Также должны быть заданы интенсивности поступления требований в случае возникновения чрезвычайных ситуаций $л^*=bл$, где b=2, 3 … Количество таких интенсивностей определяется количеством учитываемых ЧС.

2. Средней объем информации, который содержится в одном требовании – V, с помощью которой определяется объем оперативной памяти. Кроме того, должны быть заданы интенсивности потоков требований и средний объем информации в одном требовании в случае возникновения ЧС.

Определение показателей ВС начинается с определения величины μ. Затем, специальными методами с использованием метрики программ осуществляется определение количества вычислительных устройств и быстродействие этих устройств. После задания величины допустимой вероятности потери требований P производится определение количества требований, которые должны размещаться в оперативной памяти и, следовательно, необходимый объем этой памяти.

Таким образом, используя формульные зависимости, можно уточнить показатели, характеризующие ВС. Это, в свою очередь, позволит решать задачи анализа и синтеза ВС.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972.

2. Кокс Д., Смит У. Теория очередей. М.: Мир, 1966.