МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ДИСПЕТЧЕРСКОГО ПУНКТА КАК СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С «НЕТЕРПЕЛИВЫМИ» ЗАЯВКАМИ

Д.А. Малышев;
А.А. Таранцев, доктор технических наук, профессор.
Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России

Приведена математическая модель диспетчерского пункта, представляющего собой многоканальную систему массового обслуживания с очередью, которую случайным образом могут покидать заявки, не дождавшиеся обслуживания. Представлены выражения для описания вероятностей состояний такой системы и для оценки основных показателей её функционирования.

Ключевые слова: диспетчерский пункт, система массового обслуживания, «нетерпеливые» заявки

MODELLING OF WORK OF CONTROL OFFICE AS SYSTEMS OF MASS SERVICE WITH «IMPATIENT» DEMANDS

D.A. Malyshev; A.A. Tarantsev.
Saint-Petersburg university of State fire service of EMERCOM of Russia

The mathematical model of the control office representing multichannel system of mass service with turn which the demands which haven't waited for service in a random way can leave is given. Expressions for the description of probabilities of conditions of such system and for an assessment of the main indicators of its functioning are presented.

Keywords: control office, system of mass service, «impatient» demands

Диспетчерские пункты (ДП) являются важной частью систем управления различными объектами, структурами, процессами и др. Применительно к пожарной охране это единые дежурно-диспетчерские службы [1], для МЧС России в целом – это центры управления в кризисных ситуациях, применительно к крупным городам – центры управления дорожным движением и т.п. Во всех случаях основным принципом работы ДП является обслуживание потоков заявок (сообщений, сигналов, команд) – их приём, обработка, формирование управляющих воздействий и доведение их до исполнителей.

Функционирование таких ДП может быть описано с использованием матаппарата теории массового обслуживания, чему посвящено большое число работ [2–8]. При этом ДП представляется в виде многоканальной системы массового обслуживания (СМО) с очередью, куда поступает поток заявок, обслуживаемый диспетчерами (каналами обслуживания) (КО), а если все диспетчеры заняты, заявки ожидают в очереди (накопителе) и поступают на обслуживание по мере высвобождения КО. В процессе функционирования СМО некоторая часть заявок может быть потеряна ввиду перегруженности КО, ограниченности мест в очереди и времени ожидания, что является крайне нежелательным (в РД 45.120-200 [9] приведено ограничение на допустимую вероятность потери вызова – $p_{пв} \le p_{доп}$ =0,1 %).

В любом случае, применительно к ДП решаются задачи анализа и синтеза. В первом случае по известным параметрам СМО (n – число КО; m – число мест в очереди; μ – скорость обслуживания; $t_о$ – среднее время ожидания связи с диспетчером) и интенсивности потока (частоты поступления λ) заявок определяются характеристики СМО – вероятности состояний $\{p_i\}$. По ним – вероятность того, что заявка не будет обслужена $p_{пв}$ (отказ в приёме ввиду занятости КО и мест в очереди или уход из очереди, не дождавшись высвобождения КО), $m_{оч}$ – средняя длина очереди и т.п. Во втором случае (при решении задачи синтеза) по заданным требованиям к допустимым величинам характеристик СМО ($p_{пв}$, $m_{оч}$ и др.) и частоте λ определяются параметры СМО – число КО n, размер накопителя (число мест в очереди) m, скорость обслуживания μ.

Постановка задачи

В ряде случаев заявки могут покидать очередь в ДП, не дождавшись обслуживания по причине ограниченности времени ожидания. Такие ДП часто представляют как СМО с «нетерпеливыми» заявками [7]. Тем не менее для таких СМО желательно определить не только вероятности состояний $\{p_i\}$ как функции от n, m, λ, μ и $t_о$, но и вероятность потери заявки $p_{пв}$, а также соотношение между λ, μ и $t_о$, когда обеспечивается условие $p_{пв} \leq 0{,}1$ %.

Модель СМО с «нетерпеливыми» заявками

Схема n-канальной СМО с m-местной очередью и «нетерпеливыми» заявками, представленная на рис. 1, может пребывать в $n+m+1$ состояниях – $S_0 \div S_{n+m}$ с соответствующими вероятностями $p_0 \div p_{n+m}$. Граф переходов для такой СМО представлен на рис. 2. При стандартных допущениях (процесс поступления-обслуживания заявок установившийся, поток поступающих заявок простейший, с частотой λ, время обслуживание случайное и подчинено экспоненциальному закону с параметром μ, время ожидания $t_о$ также случайное и подчинено экспоненциальному закону с параметром $t_о^{-1}$) получены аналитические выражения для вероятностей состояний:

$$p_0^{-1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i/i! + \alpha^n/n! \sum_{j=1}^{m} \alpha^j/\pi_j; \quad (1)$$

$$p_i = p_0 \alpha^i/i!,\ i=1,\ \dots,\ n, \quad (2)$$

$$p_{n+j} = p_0 \alpha^{j+n}(n!\pi_j)^{-1},\ j=1,\ \dots,\ m, \quad (3)$$

где $\pi_j = \prod_{k=1}^{j}(n+k\theta)$; $\alpha=\lambda/\mu$ – приведённая нагрузка; $\theta=(t_о\mu)^{-1}$ – приведённая «нетерпеливость».

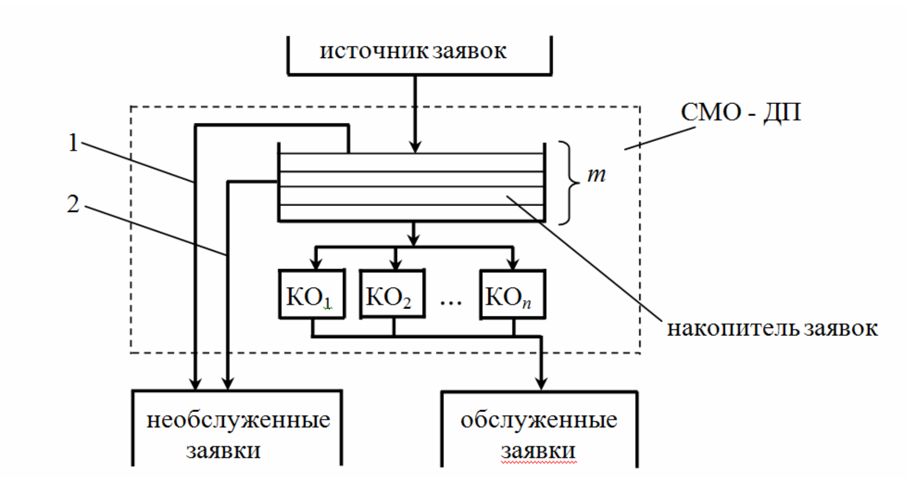

Рис. 1. **Схема n-канальной СМО с m-местной очередью и «нетерпеливыми» заявками (1 – уход заявок из очереди по причине переполнения накопителя; 2 – уход из очереди по причине «нетерпеливости»)**

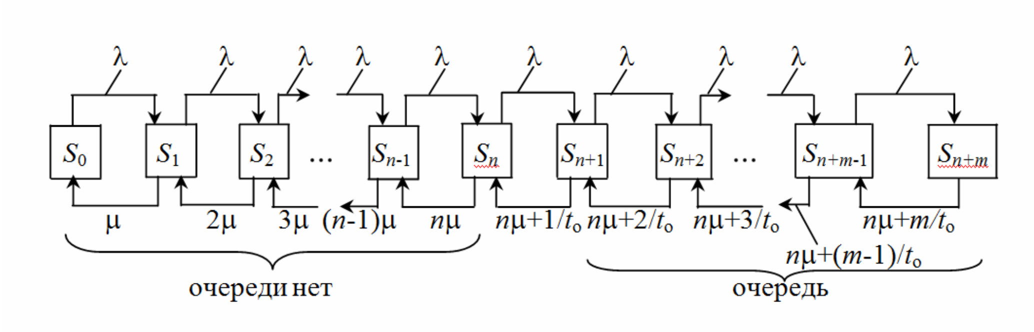

Рис. 2. **Граф переходов для *n*-канальной СМО с ограниченной *m*-местной очередью и «нетерпеливыми» заявками**

Величина очереди $m_{оч}$ может быть оценена по известному выражению:

$$m_{оч}=\sum_{j=1}^{m} jp_{n+j}.$$

Что касается вероятности потери вызова $p_{пв}$ (часто используется термин «вероятность отказа»), в литературе нет единого подхода. Например, в работе [7] приведено выражение:

$$p_{пв}=m_{оч}\theta/\alpha. \tag{4}$$

Выражение (4) не вполне корректное, поскольку при $\theta\to 0$ потерь вызовов нет, то есть $p_{пв}\to 0$, что не характерно для СМО с ограниченным числом мест в очереди m. Для оценки вероятности потери вызова $p_{пв}$ может быть предложено следующее выражение:

$$p_{пв}=p_{n+m}+p_{ун}-p_{n+m}p_{ун}, \tag{5}$$

где $p_{ун}$ – вероятность ухода заявки из очереди из-за «нетерпеливости».

Эта вероятность, в свою очередь, может быть определена из выражения:

$$p_{ун}=\sum_{j=1}^{m} p_{n+j}j\theta/(n+j\theta). \tag{6}$$

Очевидно, для стандартного случая, когда «нетерпеливости» нет ($\theta\to 0$, СМО вида M/M/n/m или в обозначениях [8] $Ex_\lambda\backslash^n Ex_\mu\backslash m$) $p_{ун}\to 0$ и выражение (5) приводится к виду:

$$p_{пв}=p_{n+m}.$$

Моделирование параметров СМО

Практический интерес представляет моделирование параметров СМО с нетерпеливыми заявками, прежде всего – вероятности $p_{пв}$. Расчёты по выражению (5) с учётом (3) и (6) показали, что при $m>2$ зависимость вероятности $p_{пв}$ от приведённой «нетерпеливости» θ имеет максимум (рис. 3) при θ_p. И наоборот, если находить зависимость предельной нагрузки α от величины θ при выполнении условия $p_{пв}=p_{доп}$, то функция $\alpha(\theta)$ будет иметь минимум при θ_α (рис. 4). Этот эффект объясняется тем, что при $\theta<\theta_p$ или $\theta<\theta_\alpha$ очередь заявок относительно большая, и заявки покидают её как по причине «нетерпеливости», так и ввиду занятости всех её мест. А затем настолько преобладают процессы ухода заявок по «нетерпеливости», что очереди практически нет, и новые заявки поступают в КО без особых задержек.

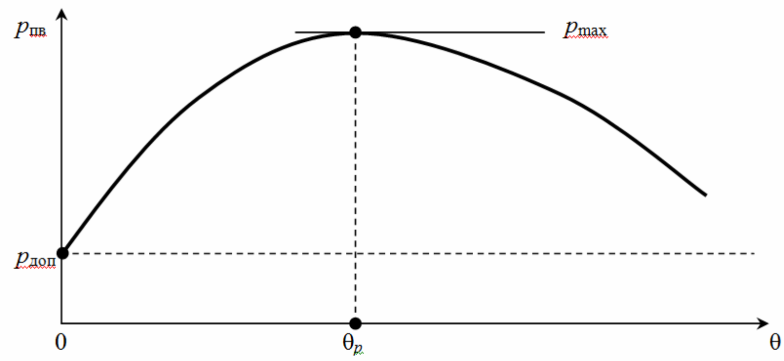

Рис. 3. **Характерный вид зависимости вероятности потери заявки в *n*-канальной СМО с *m*-местной очередью от приведённой «нетерпеливости» при α=const**

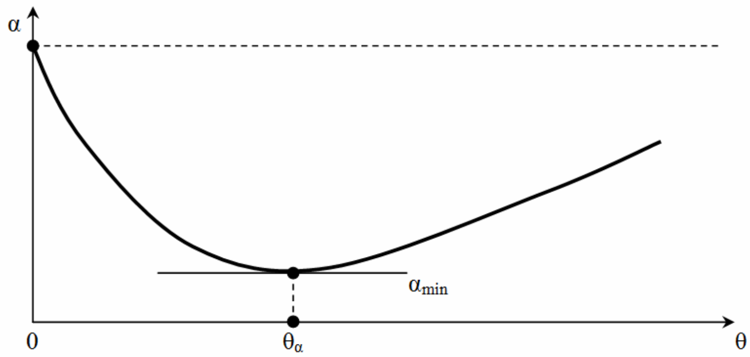

Рис. 4. **Характерный вид зависимости допустимой приведённой нагрузки в *n*-канальной СМО с *m*-местной очередью от приведённой «нетерпеливости» θ при $p_{пв}=p_{доп1\ 2}$**

Примеры

В СМО, представляющую собой ДП с одним диспетчером поступает простейший поток вызовов от абонентов в среднем каждые 30 мин (λ=0,033 мин$^{-1}$), а диспетчер тратит в среднем на обслуживание вызова 3 мин (μ=0,333 мин$^{-1}$). Таким образом, это одноканальная СМО (n=1) с двухместной (m=2) очередью (когда диспетчер общается с абонентом по одной линии, на двух других могут ожидать абоненты), а приведённая нагрузка составляет $\alpha\approx$0,1.

Если абоненты могут ожидать обслуживания сколь угодно долго (то есть «нетерпеливости» нет – $t_о\to\infty$, $\theta\to0$), то это стандартная СМО [2]. Она может находиться в четырех состояниях $S_0 \div S_3$ с вероятностями, рассчитываемыми по выражениям (1–3) при п$_j$=1: p_0=0,90009; p_1=0,09001; p_2=0,00900; p_3=0,00090. Таким образом, выполняется условие $p_3=p_{пв}$=0,00090<$p_{доп}$=0,001.

Если же абоненты «нетерпеливы» и могут ожидать связи с диспетчером в среднем $t_о$=6 мин, то θ=0,5 и вероятности состояний, рассчитанные по (1–3), будут равны соответственно: p_0=0,90372; p_1=0,09037; p_2=0,00565; p_3=0,00026. Согласно (6), вероятность ухода «нетерпеливой» заявки из очереди $p_{ун}$=0,00226, а вероятность потери вызова, согласно (5): $p_{пв}$=0,00026+0,00226-0,00026·0,00226=0,00251. То есть она в 2,5 раза превысит допустимое значение $p_{доп}$=0,001.

Если же на такую СМО с «нетерпеливыми» заявками наложить условие $p_{пв}$<$p_{доп}$=0,001, а частота поступления вызовов и среднее время ожидания останутся прежними (λ=0,033 мин$^{-1}$, $t_о$=6 мин), то вызовы диспетчер должен будет обслуживать быстрее – в среднем за 2 мин (то есть μ=0,5 мин$^{-1}$). Тогда α=0,066; θ=0,333 и, согласно (1–3): p_0=0,93510; p_1=0,06172; p_2=0,00306; p_3=0,00012. Согласно (6) $p_{\text{ун}}$=0,00081, а вероятность потери вызова, согласно (7): $p_{\text{пв}}$=0,00012+0,00081-0,00012·0,00081=0,00093. Условие $p_{\text{пв}}$=0,00093<$p_{\text{доп}}$=0,001 будет выполняться.

Таким образом, представленная аналитическая модель n-канальной m-местной СМО с «нетерпеливыми» заявками может быть использована для анализа и синтеза ДП, обслуживающего экстренные вызовы.

Литература

1. ГОСТ Р 22.7.01–99 Безопасность в ЧС. Единая дежурно-диспетчерская служба. Основные положения. URL: http://www.polyset.ru (дата обращения: 10.08.2014).
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966.
4. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: ГИФМЛ, 1963.
5. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. М.: Мир, 1965.
6. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971.
7. Новиков О.А., Петухов С.И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. М.: Сов. радио, 1969.
8. Таранцев А.А. Инженерные методы теории массового обслуживания. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Наука, 2007.
9. РД 45.120-2000 (НТП 112-2000) Городские и сельские телефонные сети. Нормы технологического проектирования. URL: http://www.snip-info.ru (дата обращения: 20.07.2014).